ПРВИ КОЛОКВИЈУМ ИЗ МАТЕМАТИКЕ

28. новембар 2022. године

Име и презиме ______ Бр. индекса ______

Смер: ЗНР ЗЖС ЗОП

Прва група задатака

1. Нека је $A = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 1 & 2 \\ 3 & 8 & -3 & 7 \\ 0 & 11 & 13 & 28 \end{bmatrix}$

(а) Матрица A има 3 врсте и 4 колоне.

(б) $a_{23} - a_{31} = -3 - 0 = -3$

1

2. Написати јединичну матрицу реда три.

$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

1

3. Дате су матрице $A = \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix}$ и $B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$. Наћи матрицу BA.

$BA = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ 5 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3\cdot 3 + 4\cdot 5 & 3\cdot(-2) + 4\cdot(-4) \\ 2\cdot 3 + 5\cdot 5 & 2\cdot(-2) + 5\cdot(-4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9+20 & -6-16 \\ 6+25 & -4-20 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 29 & -22 \\ 31 & -24 \end{bmatrix}$

1

4. Израчунати минор M_{12} и кофактор A_{12} матрице $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \frac{1}{2} \\ -3 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$

$M_{12} = \begin{vmatrix} -3 & 2 \\ 0 & 4 \end{vmatrix} = -3\cdot 4 - 2\cdot 0 = -12$

$A_{12} = (-1)^{1+2} M_{12} = -M_{12} = 12$

1

5. Израчунати детерминанте:

(а) $\begin{vmatrix} 6 & 3 \\ 7 & 4 \end{vmatrix} = 6\cdot 4 - 3\cdot 7 = 24 - 21 = 3$

(б) $\begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & 1 & 8 \end{vmatrix} = 3\begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} - 4\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} + (-5)\begin{vmatrix} 8 & 7 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 3(56+2) - 4(64+4) - 5(8-14) =$

$= 3\cdot 58 - 4\cdot 68 - 5(-6) = 174 - 272 + 30 = -68$

2

6. Дат је систем једначина $\begin{cases} 5x + 3y = 4 \\ 3x + 2y = 3 \end{cases}$

(а) Записати систем у облику матричне једначине $A \cdot X = B$: $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$

(б) Наћи инверзну матрицу A^{-1} матрице A.

$A = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \frac{1}{5\cdot 2 - 3\cdot 3} \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$, $A^{-1} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

(в) Решење матричне једначине је $X = A^{-1}B$. Наћи матрицу X.

$X = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\cdot 4 - 3\cdot 3 \\ -3\cdot 4 + 5\cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}$

(г) Решење система је $x = -1$ и $y = 3$.

2

7. Вектор $\vec{u} = (-7, 2)$ има почетак у тачки $P(2, 3)$.

(а) Означимо са Q крај вектора $\vec{u}$. Наћи координате тачке Q.

Почетак вектора: $P(2,3)$ Координате вектора $\vec{u}$:

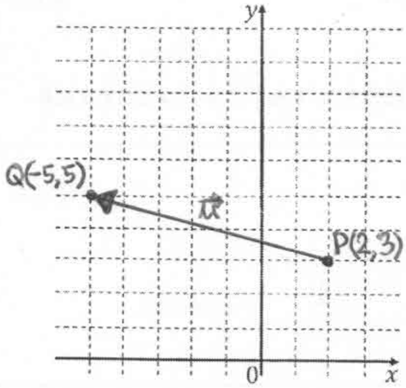
Крај вектора: $Q(x,y)$ $\vec{u} = (x-2,\ y-3) = (-7, 2)$

$x-2=-7 \longrightarrow x=-5$

$y-3=2 \longrightarrow y=5$

$Q(-5,5)$

(б) Скицирати вектор $\vec{u}$.



2

8. Дати су вектори $\vec{a} = 2\vec{i} - \vec{j} + 2\vec{k}$ и $\vec{b} = -\vec{i} + \vec{j} + 3\vec{k}$. Наћи $|\vec{a} + \vec{b}|$.

$\vec{a} = (2, -1, 2)$ $\quad \vec{a} + \vec{b} = (2+(-1),\ -1+1,\ 2+3)$ $\quad |\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{1^2+0^2+5^2}$

$\vec{b} = (-1, 1, 3)$ $\quad \vec{a} + \vec{b} = (1, 0, 5)$

$|\vec{a}+\vec{b}| = \sqrt{26}$

2

9. Наћи угао између вектора $\vec{a} = (1, 2, 0)$ и $\vec{b} = (3, -2, 1)$.

$$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} = \frac{1\cdot 3 + 2\cdot(-2) + 0\cdot 1}{\sqrt{1^2+2^2+0^2}\sqrt{3^2+(-2)^2+1^2}} = \frac{-1}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{14}} = \frac{-1}{\sqrt{70}};$$

$$\varphi = \arccos\left(-\frac{1}{\sqrt{70}}\right) = \arccos(-0{,}11952);$$

$$\varphi \approx 96{,}865^\circ; \quad \varphi \approx 97^\circ$$

2

10. Дати су вектори $\vec{a} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{b} = 3\vec{i} - 4\vec{k}$. Наћи векторски производ $\vec{a} \times \vec{b}$.

$$\vec{a}\times\vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -4 \end{vmatrix} = \vec{i}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} - \vec{j}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} + \vec{k}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -4\vec{i} - \vec{j}(-4-3) - 3\vec{k}$$

$$\vec{a}\times\vec{b} = -4\vec{i} + 7\vec{j} - 3\vec{k} = (-4, 7, -3)$$

2

Друга група задатака

11. Избалансирати хемијску једначину:

	Лева страна	Десна страна
P	$4x$	z
O	$6x+y$	$3z$
H	$2y$	$3z$

$$xP_4O_6 + yH_2O \to zH_3PO_3$$

$$\begin{aligned} 4x &= z \\ 6x+y &= 3z \\ 2y &= 3z \end{aligned} \qquad \begin{aligned} 4x \quad\; - z &= 0 \\ 6x + y - 3z &= 0 \\ 2y - 3z &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & -1 & 0 \\ 6 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{\frac{1}{4}B1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/4 & 0 \\ 6 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow{(-6)B1+B2\to B2} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 2 & -3 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow{(-2)B2+B3\to B3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1/4 & 0 \\ 0 & 1 & -3/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x - \frac{1}{4}z = 0 \qquad y - \frac{3}{2}z = 0$$

$z = t \in \mathbb{R}$; $x = \frac{1}{4}t$, $y = \frac{3}{2}t$, $(x,y,z) = (\frac{1}{4}t, \frac{3}{2}t, t)$, $t=4: (x,y,z) = (1,6,4)$, $P_4O_6 + 6H_2O \to 4H_3PO_3$ 3

12. Дати су вектори $\vec{a} = \vec{i} - \vec{j} + \vec{k}$, $\vec{b} = -\vec{j} + \vec{k}$ и $\vec{c} = \vec{i} + \vec{j} + \vec{k}$.

(а) Израчунати $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$.

$$(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2 + 0 = -2$$

(б) Да ли су вектори $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ компланарни? ДА НЕ

(в) Ако нису, наћи запремину паралелепипеда који је одређен њима.

$$V = |(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}| = |-2| = 2$$

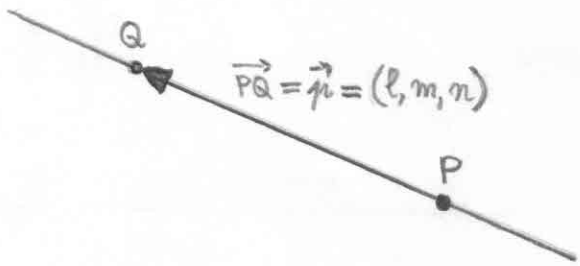
3

13. Наћи скаларне параметарске једначине праве која пролази кроз тачке $P(2, -4, 7)$ и $Q(0, -3, 5)$.

$\vec{p} = (l, m, n) = (0-2, -3-(-4), 5-7)$

$\vec{p} = (l, m, n) = (-2, 1, -2)$

$(x_0, y_0, z_0) = (2, -4, 7)$



$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + lt \\ y &= y_0 + mt \\ z &= z_0 + nt \end{aligned}\right\} \qquad \left.\begin{aligned} x &= 2 - 2t \\ y &= -4 + t \\ z &= 7 - 2t \end{aligned}\right\}$$

3

БОДОВАЊЕ		
1. задатак	1	
2. задатак	1	
3. задатак	1	
4. задатак	1	
5. задатак	2	
6. задатак	2	
7. задатак	2	
8. задатак	2	
9. задатак	2	
10. задатак	2	
11. задатак	3	
12. задатак	3	
13. задатак	3	
УКУПНО	**25**	